(Versión preliminar)

Dinámica de la población endógena: una reformulación del modelo de crecimiento de Solow *

Gastón Cayssials**y Santiago Picasso ***

Resumen

En este trabajo se presenta una reformulacin del modelo clsico de crecimiento de Solow donde se incorpora una dinmica de la poblacin endgena. En lugar de asumir una tasa constante del crecimiento de la poblacin e independiente de las variables del modelo, desarrollamos un modelo donde el crecimiento de la poblacin depende del salario real(o del consumo per capita). Encontramos que, como en el modelo clsico de Solow, existe un estado estacionario estable para la relacin capital trabajo, que es siempre menor que el que se deduce del modelo original con tasa de crecimiento de la poblacin nula, pero no es necesariamente nico. Hay una cantidad impar y solo el menor y el mayor son localmente estables. Finalmente se realiza un estudio de estática comparativa de los estados estacionarios al variar la productividad total de los factores y se comparan los resultados con los del modelo original.

Palabras Claves: modelo de crecimiento de Solow; población endógena; tiempo continuo.

JEL classification: C62; O41

*Nuestra investigación fue apoyada por CSIC-UDELAR (projecto “Grupo de investigación en Dinámica Económica”; ID 881928, y Programa de Iniciación a la Investigación -2017- proyecto “Crecimiento económico y dinámica de la población: teoría y análisis empírico”; ID 406).

**Departamento de Métodos Cuantitativos - Facultad de Ciencias Económicas y de Administración - Universidad de la República (Uruguay). Email: gcayssials@ccee.edu.uy

***Departamento de Economía - Facultad de Ciencias Económicas y de Administración - Universidad de la República (Uruguay). Email: picasso.economia@gmail.com

1. Introducción

Los modelos de crecimiento apuntan, a grandes rasgos, a determinar los factores que determinan el crecimiento en el largo plazo de una economía. Explicar y describir el fenómeno del crecimiento, su velocidad y sus determinantes son su objetivo explícito.

Uno de los supuestos utilizados en el modelo, y en general usado en los modelos estándar de crecimiento (Solow[23]-Swan[24], Ramsey[21]-Cass[12]-Koopman[18], Romer[22], Mankiw-Romer-Weil[20]), es que la población (asociada a la fuerza de trabajo) crece a tasa constante $n > 0$. Esto implica que la población crece exponencialmente. Si bien puede proporcionar una aproximación adecuada durante el período inicial, claramente no es realista, porque -creciendo de manera exponencial- la población tiende a infinito cuando el tiempo (t) tiende a infinito. El supuesto, que condiciona fuertemente los resultados del modelo, claramente no es realista. La evolución de la población en el último siglo[25] muestra que ha crecido, pero a tasa no contante sino a tasa decreciente tendiendo a ser nula, e incluso negativa en algunas regiones. El principal objetivo del trabajo es introducir una población endógena en el modelo de Solow, donde la dinámica de la población y más concretamente, su tasa de crecimiento, está determinada por una funcin que depende del consumo per cápita.

Recientemente varios estudios se enfocan en la reformulación de los modelos de crecimiento introduciendo leyes de población alternativas a la ley exponencial. Estos trabajos se pueden dividir según dos enfoques alternativos. Introduciendo leyes de población que verifican algunas propiedades que capturan los principales hechos estilizados de la dinámica de la población (creciente, a tasa decreciente y tendiendo a cero) o dinámicas de la población explicadas endógenamente por el modelo.

Los trabajos de Accinelli y Brida[1],[2],[3], de Bay[4], de Brida y Maldonado[10], de Cai[11] y de Ferrara y Guerrini[14],[15], entre otros, se enmarcan en el primer enfoque. En estos, bajo distintas hipótesis acerca de la dinámica de la población se reformulan modelos de crecimiento y se analiza la dinámica resultante. Bien sea utilizando leyes de población particulares, utilizadas en la demografía y otras ciencias sociales o leyes generales que cumplen algunas propiedades, población variable pero acotada, creciente a tasa decreciente, etc. Propiedades que se ajustan al comportamiento observado de la población mundial en los últimos cien años. Sin embargo, estas vienen determinadas por fuera del sistema económico, la dinámica de la población no está influenciada de ninguna forma por la evolución de las variables del modelo, son exógenas.

El segundo enfoque reformula los modelos de crecimiento, pero en lugar de asumir leyes de población exógenas, la dinámica de la población es endógena al modelo, permitiendo la interdependencia entre las variables del modelo y el comportamiento de la población. Hay varios modelos teóricos que incorporan la relación entre una de las determinantes de la evolución de la población, la tasa de fertilidad y el crecimiento económico. Quizs los mas relevantes sean Galor[17], Benhabib y Nishimura[9], y Becker, Murphy y Tamura,[7], entro otros.

Todos estos desarrollos teóricos, desde distintas perspectivas (economía de las familias, teorías del capital humano, teorías de crecimiento) y a través de distintos mecanismos de transmisión, explican como la dinámica de la población y el desempeño económico están estrechamente interrelacionados. Sea por simple aritmética (efecto negativo del crecimiento de la población sobre el ingreso per cápita), por salarios diferenciales entre hombres y mujeres (Galor y

Weil[16]), por los costos de criar hijos el costo de oportunidad (Becker[5] y Becker y Lewis[8]) o por los retornos crecientes del capital humano (Becker y Barro[6]). Independientemente del mecanismo causal, en general, se postula una relación inversa entre la tasa de crecimiento de la población (fundamentalmente explicada por la fertilidad) y el nivel del ingreso per cápita. Esta relación, por otra parte, es la observada en las principales economías modernas, donde conviven altos niveles de ingreso con tasas de crecimiento de la población extremadamente bajas en relación con las de economías con niveles bajos de ingresos.

Finalmente, Corchon[13] reformula el modelo de Solow bajo un enfoque Malthussiano, la tasa de crecimiento de la población es una función creciente del salario real. Con esta especificación muestra la posibilidad de equilibrios múltiples, dependiendo de la dinámica de la población. En nuestro trabajo se sigue el procedimiento utilizado por Corchon[13], con dos diferencias. Por un lado se generaliza la función de producción. Este trabajo no realiza una especificación explícita de la función. Por otro lado se asume un crecimiento de la población positivo, donde para un rango de niveles del consumo percapita crece a tasa creciente y luego de un umbralcrece a tasa decreciente y se converge a una cota mínima cercana a cero. Por lo tanto, nuestro trabajo generaliza los resultados de Corchón para un tipo específico de crecimiento de la población. El comportamiento en el primer tramo refleja las ideas malthusianas respecto a la dinámica de la población y el despeño ecónomico. El segundo tramo (donde la población crece pero a tasa decreciente) se inspira en los aportes teóricos de Becker fundamentalmente.

El trabajo esta ordenado como se sigue, en la sección siguiente presentamos una reformulación del modelo de Solow-Swan y caracterizamos la solución. El la sección 3 se realiza un ejercicio de estática comparativa y finalmente en la sección 4 se plantean las conclusiones.

2. Reformulación del modelo de Solow-Swan

La versión estándar del modelo asume una economía que produce un bien compuesto, que puede ser consumido o usado en la producción del propio bien. La economía esta dotada de una tecnología definida por una función de producción $F(K, L)$, donde K es el stock de capital y L es el nivel de la fuerza de trabajo, que cumple las siguientes propiedades:

$$Y(t) = AF(K(t), L(t)) \tag{1}$$

donde A es la productividad total de los factores y F verifica las propiedades usuales:

1. $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$,$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$,$\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0$ $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$.
2. $F(K, 0) = F(0, L) = 0; \forall K, L \in R^+$.
3. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L); \forall \lambda, K, L \in R^+$(retornos constantes a escala).
4. $\lim\limits_{K \longrightarrow 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim\limits_{L \longrightarrow 0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = +\infty; \lim\limits_{K \longrightarrow +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \lim\limits_{L \longrightarrow +\infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0$ (condiciones de INADA).

El capital se deprecia a una tasa constante δ, y el producto puede ser usado como bien de consumo o inversión:

$$Y(t) = AF(K(t), L(t)) = C(t) + \dot{K}(t) + \delta K(t), \delta \in (0, 1) \tag{2}$$

El ahorro es una fracción fija, s del producto, de donde la acumulación de capital es:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{3}$$

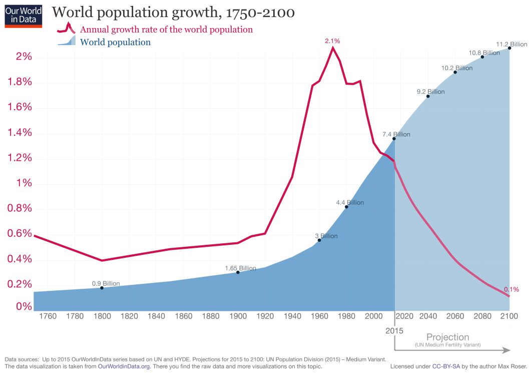
$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta = s\frac{Y(t)}{L(t)}\frac{L(t)}{K(t)} - d = s\frac{Af(k(t))}{k(t)} - \delta \tag{4}$$

donde $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ y $f(k(t)) = \frac{F(K(t),L(t))}{L(t)}$.

$$k(t)\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = s\frac{Af(k(t))}{k(t)} - \delta k \tag{5}$$

El supuesto de crecimiento de la población es una innovación que incorpora nuestro modelo respecto al modelo planteado por Solow-Swan. Este último utilizaba una tasa de crecimiento constante, esto implica que la poblaciónn total crece exponencialmente. Este supuesto parecería adecuado a mediados del siglo XX, aunque parecería poco creíble observando la dinámica de la población desde mediados del siglo XX. En el contexto donde se desarrollaron los modelos dinámicos de crecimiento como el Solow-Swan o Ramsey-Cass-Koopman este supuesto parecería creíble (ver grfico 1). Sin embargo, en nuestro modelo (siguiendo a Corchón), la dinámica

Figura 1: Evolución de la población mundial. Período 1750-2100.

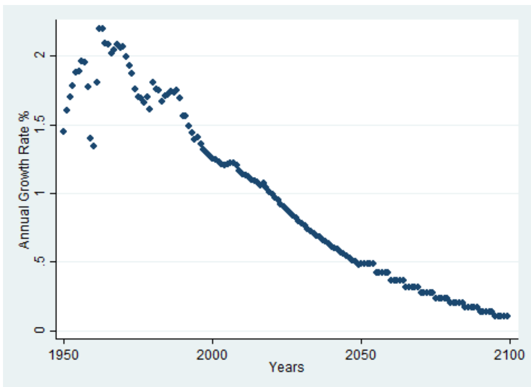


Fuente: One world data.

de la población se desprende de la trampa Malthusiana y busca reflejar la evolución de la población mundial en perspectiva histórica reflejando la dinámica de los últimos dos siglos.

La evolución de la población, no fue exponencial, la transición demográfica mundial llevó a una desaceleración en el crecimiento de la población. Según estimaciones de las Naciones Unidas[25], la población dejará de crecer y se estancará entorno a a fines del siglo XXI(suponiend una variación de la fertilidad media). Esto queda reflejado en el gráfico a continuación, el cual muestra una evolución de la tasa de crecimiento de la población mundial decreciente.

Figura 2: Tasa de crecimiento de la población mundial. Período 1950-2100.



Fuente: Naciones Unidas, Divisin Poblacin. Revisin 2017

Esta evidencia, nos permite argumentar que este tipo de modelos, en particular el Solow-Swan, tienen una debilidad fuerte en este supuesto. El cual parece poco discutido a excepción de algunos casos ya comentados. Se podría, entonces, afirmar que poco se ha discutido y cuestionado sobre este supuesto en la literatura teórica.

Estas observaciones, nos motivaron a modificar la formulación incorporando finalmente una evolución distinta de la tasa de crecimiento de la población a lo largo del tiempo. Como mostramos en la figura 2 la tasa de crecimiento no es contsante, sino que es positiva a tasa de creciente en el trama desde 1960 hasta la fecha de este paper. Esto se formaliza a continuacin, dinamizndola a través del consumo per capita en la economía, donde se asume que el número de trabajadores y consumidores coincide y su tasa de crecimiento depende del consumo:

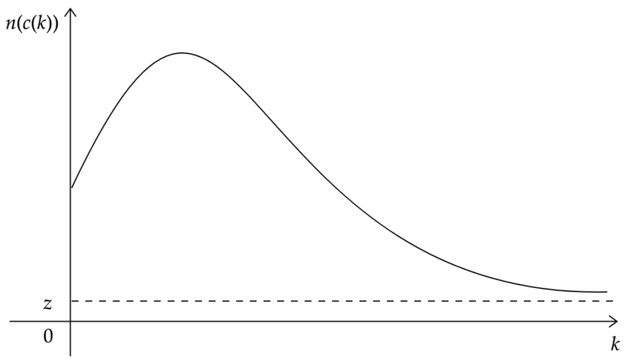
$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n(c(t)),\ n(c) \geq 0, \forall c \tag{6}$$

donde $n(.)$ es una función continua, diferenciable y existe c_0 tal que $n'(c) \geq 0$, $\forall c \leq c_0$, y $n'(c) < 0$, $\forall c > c_0$. Y además: $\lim\limits_{w \longrightarrow +\infty} n(c) = 0$

Notar que una tasa de crecimiento de la población constante como en el modelo de Solow es caso particular, ya que $n(c) = cte$

La dinámica de la población es endógena, a diferencia del modelo de Solow-Swan tradicional. Respecto al caso de Corchón, se agrega una variante. La dinámica de la población depende del consumo de los individuos $c(t) = (1 - s)Af(k(t))$. De esta manera se vincula al igual que en el modelo de Corchn, la población con las variables económicas del modelo.

Figura 3: Ejemplo de forma funcional de n



En terminos per cápita la acumulación de capital es:

$$\dot{k}(t) = \frac{\partial(K/L)}{\partial t} = \frac{\dot{K}L}{L^2} - \frac{K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - (\frac{K}{L})(\frac{\dot{L}}{L}) = \frac{\dot{K}}{L} - k(t)n(c(t)) \tag{7}$$

Y reemplazando en la ecuación (6):

$$Af(k) = c + \dot{k} + [n(c) + \delta]k = (1-s)Af(k) + \dot{k} + [n((1-s)Af(k)) + \delta]k \tag{8}$$

La ecuación de acumulación de capital per capita:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{Af(k) - (1-s)Af(k)}{k} - n((1-s)Af(k)) + \delta \tag{9}$$

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k_t)}{k} - n((1-s)Af(k)) + \delta \tag{10}$$

y es la ecuación diferencial que describe la dinámica del modelo.

2.1. Solución del modelo

El modelo queda definido por la dinámica que surge de la tasa de crecimiento del capital per capita (g_k)

$$g_k = \frac{sf(k)}{k} - \delta - n(c) = \frac{sf(k)}{k} - \delta - n((1-s)Af(k)) \tag{11}$$

Proposición 1. *El modelo admite al menos un estado estacionario*

Demostración. Es claro que la función $g_k = \frac{sAf(k)}{k} - \delta - n((1-s)Af(k))$ tiende a $+\infty$ cuando $k \to 0$. Al ser una función continua, toma valores positivos en un intervalo cercano a cero.

Cuando $k \to +\infty$ la función tiende a $-\delta - n((1-s)Af(k)) < 0$ ya que $n(c) \geq 0, \forall c$. La función $g_k = \frac{sAf(k)}{k} - \delta - n((1-s)Af(k))$ (continua) cambia de signo en $(0, +\infty)$ y por lo tanto tiene al menos una raiz.

□

Proposición 2. *Sea k_s el valor de equilibrio del capital per capita que se deduce del modelo de Solow con tasa de crecimiento de la población nula, esto es, el que cumple la condición:* $s\frac{Af(k_s)}{k_s} = \delta$

El valor del capital per capita de equilibrio del estado estacionario es siempre menor o igual que k_s

Demostración. Si $n((1-s)Af(k_s)) = 0$ se cumple que $k^* = k_s$ ya que $s\frac{Af(k_s)}{k_s} = \delta$. Si $n((1-s)Af(k_s)) > 0$ se cumple que la función G toma valores positivos para valores de k cercanos a cero y un valor negativo en k_s ($(G(k_s) < 0)$) entonces se puede afirmar que existe k^* tal que $G(k^*) = 0$ y además, $k^* \in (0, k_s)$ esto es: $0 < k^* < k_s$ □

A continuacin se muestra que el equilibrio es localmente estable si cumpla la condicin de que la tasa de crecimiento del capital per capita es negativa.

Proposición 3. *Si $gk < 0$, el equilibrio es localmente estable.*

Demostración.

$$g(k)k = \dot{k} = g\left(k^*\right)k^* + \left[g(k)k\right]'\left[k - k^*\right] \tag{12}$$

Como

$$[g(k)k]' = [g(k)]'k + g(k)k' \tag{13}$$

$$\dot{k} = g(k^*)'k^*k + g(k^*)'k^{*2} \tag{14}$$

$$k(t) = z \cdot e^{g(k^*)'k^*t} + k^* \tag{15}$$

Si $g(k^*)'$ es negativo el equilibrio es estable

□

Proposición 4. *Si se cumple la condición :*

$$s\left[\frac{F'(k)k - F(k)}{k^2}\right] - n'[(1-s)F(k)]F'(k)(1-s) \neq 0 \tag{16}$$

hay una cantidad impar de equilibrios, el menor y el mayor alternan y son localmente estables.

La condicin (16) *asegura que no existan races dobles. Por lo tanto, considerando* **??** *existir un nmero impar de equilibrios. Adems el primero y el ltimo cumplen con la condicin de que* (16) *es negativa en el valor k de equilibrio por lo tanto por la proposicin 3 se puede afirmar la estabilidad*

3. Esttica Comparativa

En este aparatado se realiza algunos ejercicios de esttica comparativa. Estos arrojan luz sobre la importancia de asumir nuevos supuestos, en los posibles equilibrios y las consecuencias tericas que conlleva.

En este apartado se realiza un ejercicio de esttica comparativa, utilizando la funcin de tasa de crecimiento de poblacin dependeiente del consumo per capita de la economa.

Proposición 5. *Suponiendo estado estacionario y con una funcin de produccin Hicks-Neutral $F(k) = A.f(k)$. Un pequeo incremento de A incrementa el k de estado estacionario(k^*) ⇔ $\frac{n'[(1-s)Af(k)]}{k^*} < \frac{s}{1-s}$*

Demostración. Primero se diferencia totalmente la dinmica de crecimiento del capital, valuada en el ptimo. En este caso, el diferencial total es igual a cero.

$$dg_k = s\left[\frac{Af'(k)k - Af(k)}{k^2}\right]dk^* - n'[(1-s)Af(k)]Af'(k)dk^*(1-s) + \frac{sf(k)}{k}dA - n'[(1-s)Af(k)](1-s)f(k)dA = 0 \tag{17}$$

Se divide ambos lados de la ecuacin por el diferencial de A:

$$\{s\left[\frac{Af'(k)k - Af(k)}{k^2}\right] - n'[(1-s)Af(k)]Af'(k)(1-s)\}\frac{dk^*}{dA} = \frac{sf(k)}{k} - n'[(1-s)Af(k)](1-s)f(k) \tag{18}$$

Se obtiene:

$$\frac{dk^*}{dA} = \frac{\frac{sf(k)}{k} - n'[(1-s)Af(k)](1-s)f(k)}{\{s\left[\frac{Af'(k)k-Af(k)}{k^2}\right] - n'[(1-s)Af(k)]Af'(k)(1-s)\}} \tag{19}$$

Simplificando:

$$\frac{dk^*}{dA} = \frac{\frac{sf(k)}{k} - n'[(1-s)Af(k)](1-s)f(k)}{A\{s\left[\frac{f'(k)k-f(k)}{k^2}\right] - n'[(1-s)Af(k)]f'(k)(1-s)\}} \tag{20}$$

El denominador de la ecuacin es negativo, ya que la derivada de la g_k es negativo en estados atractores. Por lo tanto, el nmerador de la ecuacin 20 debe ser negativo para que $\frac{dk^*}{dA} > 0$

Entonces, $\frac{sf(k)}{k} - g'[(1-s)Af(k)](1-s)f(k) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{g'[(1-s)Af(k)]}{k} < \dfrac{s}{1-s}$

□

Al igual que en [13] se encuentra que el efecto de la tecnologa es ambiguo. Nuevamente la diferencia entre el modelo de Solow y el nuestro es que: en el modelo de Solow-Swan siempre generaba un aumento del capital de equilibrio.En nuestro caso eso depende de la tasa de crecimiento de la poblacin.

Proposición 6. *Suponiendo estado estacionario y una funcin Hicks-Neutral* $F(k) = A.f(k)$. *En el Estado Estacionario un pequeo incremento de A incrementa el ingreso per capita estado estacionario*

Siendo $y^* = A.f(k^*)$

$$dy^* = f(k^*)dA + Af'(k)dk \tag{21}$$

Se divide ambos lados de la ecuacin por el diferencial de A:

$$\frac{dy^*}{dA} = f(k^*) + Af'(k^*)\frac{dk^*}{dA} \tag{22}$$

$$\frac{dy^*}{dA} = f(k^*)\left\{1 + \frac{n'[(1-s)Af(k^*)](1-s)f(k^*)' - \frac{sf(k^*)'}{k^*}}{\{s\left[\frac{f'(k^*)k^*-f(k^*)}{k^{*2}}\right] - n'[(1-s)Af(k^*)]f'(k^*)(1-s)\}}\right\} \tag{23}$$

$$\frac{dy^*}{dA} = f(k^*)\frac{\frac{-sf(k^*)}{k^{*2}}}{\{s\left[\frac{f'(k^*)k^*-f(k)}{k^{*2}}\right] - n'(.)f'(k^*)(1-s)\}} \tag{24}$$

En este caso se generaliza el resultado de Corchn y se encuentra al igual que en el modelo de Solow-Swan un efecto positivo en el ingreso percapita del incremento del cambio tecnolgico, aunque este efecto se ve mediado por la tasa de crecimiento de la poblacin.

Proposición 7. *Suponiendo estado estacionario y con una funcin de produccin Hicks-Neutral* $F(k) = A.f(k)$. *Un pequeo incremento de s incrementa el k de estado estacionario si* $\Leftrightarrow \dfrac{1}{k^*} > -n'[(1-s)Af(k)]$

Demostración.

$$dg_k = s\left[\frac{Af'(k)k - Af(k)}{k^2}\right]dk^* - n'[(1-s)Af(k)]Af'(k)dk^*(1-s) + \frac{Af(k)}{k}ds - n'(-Af(k))ds = 0 \tag{25}$$

Se divide ambos lados de la ecuacin por el diferencial de A y reordenando. Se obtiene:

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{-\frac{Af(k)}{k} + n'(-Af(k))}{\left\{s\left[\frac{Af'(k)k - Af(k)}{k^2}\right] - n'[(1-s)Af(k)]Af'(k)(1-s)\right\}} \tag{26}$$

Simplificando:

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{Af(k)\left\{-\frac{1}{k} - n'\right\}}{\left\{s\left[\frac{Af'(k)k - Af(k)}{k^2}\right] - n'[(1-s)Af(k)]Af'(k)(1-s)\right\}} \tag{27}$$

Entonces el efecto de un cambio en la tasa de ahorro solo es positivo, si se cumple que $n' > -\frac{1}{k}$. □

En fases de tasas de crecimiento crecientes el efecto de un cambio en la tasa de ahorro tiene como consecuencia un cambio positivo en el capital per capita de equilibrio. Sin embargo, en perodos con desaceleracin en el crecimiento de la poblacin, aumentar el ahorro no tiene incrementos en el capital de estado estacionario. En el caso particular en que n' sea igual a $\frac{1}{k}$ no habra efectos. Este resultado contradice el modelo de Solow-Swan, as como el resultado que plantea Corchn, 2016 en su caso particular.

4. Conclusiones

En este trabajo se utilizó el modelo de Solow-Swan-Corchón. En el cual se supuso una tasa de crecimiento de la población no constante sino endógena que depende del consumo per capita. El mismo, aporta nuevos resultados en la literatura de crecimiento y economía matemática, generalizando el modelo de Solow-Swan posteriormente reformulado por Corchón. La particularidad de este trabajo es que se generaliza los resultados de Corchón. A su vez, se mostró que no necesariamente existe una solución única a la que converge la economía. A diferencia de Solow-Swan nuestro modelo muestra, que se pueden alcanzar múltiples equilibrios dependiendo de las especificaciones funcionales que presente el modelo. Entonces, la explicación de convergencia que surge de Solow-Swan ya no es válida porque puede haber clubes de países que con iguales funciones de producción depreciación del capital, tasas de ahorros y sin embargo se encuentren en fases diferentes de la transición demográfica lo que los lleve a equilibrios diferentes en capital, consumo, ahorro, inversión. Por lo que en este caso no habría convergencia. A su vez, el efecto del cambio tecnológico ya no es trivial, sino que depende de la fase de la transición demográfica en la que se encuentre la economía.

Atando ambos resultados anteriores, se podría argumentar que el cambio tecnológico desembocaría para algunos casos en el pasaje de un equilibrio no deseable a uno Pareto superior. Sin embargo, también podría significar el pasaje de un equilibrio óoptimo a otro Pareto inferior, o también la perpetuidad en un equilibrio inferior en términos de Pib per capita. Por lo tanto, la incorporación de tecnología, no traería como resultado necesariamente un incremento del capital per capita óptimo, sino que se podría converger a resultados relativamente no deseados. Claramente esta reconfiguracin del modelo Solow-Swan, nos arroja nuevos equilibrios, nuevas soluciones y relaciones teóricas que levantan algunas crticas y limitaciones del modelo tradicional.

Referencias

[1] Accinelli, E. y Brida, J.G. (2007). Population growth and the Solow-Swan model. *International Journal of Ecological Economics and Statistics*, 8(S07): 54-63.

[2] Accinelli, E. y Brida, J.G. (2007). The Ramsey model with logistic population growth. *Economics Bulletin*, 3(15): 1-8.

[3] Accinelli, E. y Brida, J.G. (2007) The dynamics of the Ramsey economic growth model with the von Bertalanffy population growth law. *Applied Mathematical Sciences* 1(3): 109-118.

[4] Bay, N. S. (2012). On the attraction of positive equilibrium point in Solow economic discrete model with Richards population growth. *Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics* 2(3): 177.

[5] Becker, G. (1960). An economic analysis of fertlity. En Demographic and economic change in developed countries, Universites-Natonal Bureau Commitee for Economic Research, ed., Princeton NJ: Princeton University Press

[6] Becker, G. S. y Barro, R. J. (1988). A reformulation of the economic theory of fertility. *The quarterly journal of economics*, 103(1): 1-25.

[7] Becker, G, Murphy, K., y Tamura, R. (1990).Human Capital, Fertility and Economic growth. *Journal of Politcal Economy* 98(5Part 2): 12-37.

[8] Becker, G y Lewis, G. (1973). On the Interaction between the Quantity and Quality of the children. *Journal of Politcal Economy*, 81(2): 279-288.

[9] Benhabib, J. y Nishimura, K. (1989). Endogenous fuctuations in the Barro-Becker theory of fertility. *Demographic change and economic development*. (pp. 29-41). Springer, Berlin, Heidelberg

[10] Brida, J. G. y Maldonado E.L. (2010): Closed form solutions to a generalization of the Solow growth model. *Applied Mathematical Sciences* 1: 1991-2000.

[11] Cai, D. (2012). An economic growth model with endogenous carrying capacity and demographic transition. *Mathematical and Computer Modelling* 55(3): 432-441.

[12] Cass, D. (1965). Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. *Review of Economic Studies* 32: 233-240.

[13] Corchón, L. C. (2016). A Malthus-Swan-Solow model of economic growth. Journal of Dynamics & Games, 3(3), 225-230.

[14] Ferrara, M. y Guerrini, L. (2009). The Ramsey Model with Logistic Population Growth and Benthamite Felicity Function Revisited.*Wseas transactions on mathematics* 3(8): 97-106.

[15] Ferrara, M. y Guerrini, L. (2012). Hopf bifurcation in a modified Ramsey model with delay. *Far East Journal of Mathematical Sciences* 68(2): 219-225.

[16] Galor, O. y Weil, D. N. (2000). Population, technology, and growth: From Malthusian stagnation to the demographic transition and beyond. *American Economic Review*, 90: 806-828.

[17] Galor, O. (2005). From stagnation to growth: Unified growth theory. *Handbook of Economic Growth*, 171293.

[18] Koopmans, T.C. (1965). On the concept of optimal economic growth. *The Econometric Approach to Development Planning*. North-Holland, Amsterdam.

[19] Lucas, R. (1988). On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics* 22: 3-42.

[20] Mankiw, N.G., D. Romer, D. y Weil, D.N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2): 407-437.

[21] Ramsey, F.P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal* 38: 543-59.

[22] Romer, P.M. (1990). Endogenous growth and technical change. *Journal of Political Economy* 98(2): 71-102.

[23] Solow, R. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The Quarterly Journal of Economics* 70(1): 65-94.

[24] Swan, T.W. (1956). Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic record* 32(2), 334-361.

[25] United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division. *World Population Prospects: The 2015 Revision, Key Findings and Advance Tables.* Working Paper No. ESA/P/WP.241, 2015.

[26] Uzawa, H. (1965). Optimum Technical Change in An Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review* 6(1): 18-31.